Ecole Louis de BROGLIE - ESEO - ESTIT - ISEB - ISEM - ISEN - ISEP

Ecole associée : EISTI

MATHEMATIQUES **SERIE M** *Vendredi 27 mai 1994 de 8 h à 12 h*

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée.
Il sera tenu compte de la qualité, de la présentation et de l'orthographe.
"L'usage de la calculatrice est autorisé".

Dans tout le problème, $M_2(\mathbb{R})$ (respectivement $M_2(\mathbb{C})$) désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ (respectivement dans $\mathbb{C}$).

On pose $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ ; \ ad - bc = 1 \right\}$.

Si α est un réel et β un élément de $\{0,1\}$ on note $E_{\alpha,\beta}$ l'équation différentielle

$$y''(x) + (\alpha - 2\beta \cos 2x)\, y(x) = 0$$

et $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des solutions de $E_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Première partie

1) Montrer que G est un groupe non commutatif pour la multiplication des matrices.

2) Soit $A \in G$. On note t sa trace.

   a) Montrer que A admet une unique valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant : $|\mu| \leqslant 1$ et $\mathrm{Im}(\mu) \geqslant 0$. On exprimera μ en fonction de t.

   b) Prouver que : $|\mu| = 1 \iff -2 \leqslant t \leqslant 2$.

3) Soit $A \in G$. Prouver que 1 est valeur propre de A^2 si et seulement si A admet une seule valeur propre complexe égale à 1 ou bien à - 1.

4) a) Donner un exemple de matrice de G diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ mais non diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

   b) Préciser toutes les matrices de G qui ne sont pas diagonalisables dans $M_2(\mathbb{C})$.

Deuxième partie

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{0,1\}$.

a) Montrer qu'il existe un unique couple (C,S) d'éléments de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ vérifiant : $C(0) = 1$, $C'(0) = 0$ et $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$.

Ces fonctions dépendent bien sûr de α et β.

b) Montrer que (C,S) est une base de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ et déterminer les coordonnées d'un élément y de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ dans cette base.

c) Montrer que C et S sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

d) Dans la suite on note C_α et S_α les fonctions C et S précédentes dans le cas où $\beta = 0$. Déterminer ces fonctions C_α et S_α.

2) Dans cette question seulement, on suppose $\alpha > 0$ et $\beta = 1$. On pose $\alpha = \omega^2$ avec $\omega > 0$.

On définit la suite de fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad U_0(x) = \cos(\omega x)$$

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad U_n(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin(\omega(x-t))\ 2\cos 2t\ U_{n-1}(t)\ dt.$$

a) Trouver une constante M telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |U_n(x)| \leqslant \frac{M^n |x|^n}{n!}$$

b) Montrer que la série de fonctions ΣU_n converge uniformément sur tout segment $[-A,A]$ avec $A > 0$. On note g la somme de cette série de fonctions. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \cos(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin(\omega(x-t))\ 2\cos 2t\ g(t)\ dt$.

d) Montrer que g est égale à la solution C de $E_{\alpha,1}$.

3) Pour tout y de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ on pose :

$$\tilde{y} : x \mapsto y(\pi+x) \quad \text{et} \quad \hat{y} : x \mapsto y(\pi-x)$$

et on définit les applications $\varphi : y \mapsto \tilde{y}$ et $\psi : y \mapsto \hat{y}$.

a) Montrer que φ et ψ sont deux endomorphismes de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ et calculer $\psi \circ \psi$.

b) On note A la matrice $\begin{pmatrix} C(\pi) & S(\pi) \\ C'(\pi) & S'(\pi) \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in G$ (on pourra utiliser la fonction $W : x \mapsto \begin{vmatrix} C(x) & S(x) \\ C'(x) & S'(x) \end{vmatrix}$) et montrer que A est la matrice de φ dans une certaine base de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ que l'on précisera.

c) Montrer que ψ est diagonalisable.
Déterminer la matrice B de ψ dans la base (C,S) et les valeurs propres de ψ. En déduire que $S'(\pi) = C(\pi)$.

4) On note τ la trace de la matrice A précédente.

a) Etablir l'équivalence des propositions suivantes :

(i) $\tau = 2$ ou $\tau = -2$.

(ii) $E_{\alpha,\beta}$ admet une solution non nulle π-périodique ou une solution non nulle π-antipériodique ; c'est-à-dire vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$ $y(\pi+x) = -y(x)$.

b) Montrer que les propositions (i) et (ii) sont aussi équivalentes à :

(iii) $S(\pi)C'(\pi) = 0$.

c) Montrer que $E_{\alpha,\beta}$ admet une solution non nulle 2π-périodique si et seulement si $\tau = 2$ ou $\tau = -2$. Déterminer les réels α pour lesquels $E_{\alpha,0}$ admet une solution non nulle 2π-périodique.

Troisième partie

α étant fixé dans $\mathbb{R}$, on note H le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ et L_α le sous-espace de H formé des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_{n+1} + (4n^2 - \alpha)\, c_n + c_{n-1} = 0$$

et enfin on note B_α le sous-espace de L_α formé des suites bornées de L_α.

1) Montrer que L_α est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

2) Si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux éléments de L_α montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} \\ d_n & d_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}.$$

3) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un élément de B_α.

a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to-\infty} c_n = 0$.

b) En déduire que $\dim B_\alpha \leqslant 1$.

c) Montrer qu'il existe n_0 dans $\mathbb{Z}$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}$ $|c_n| \leqslant |c_{n_0}|$. En déduire que si $\alpha < -2$ alors B_α est réduit à la suite nulle.

4) Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

son coefficient de Fourier d'indice $n \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que f est π-périodique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_{2n+1}(f) = 0$.

b) On suppose dans ce b) que f est π-périodique et on pose $d_n = c_{2n}(f)$.
Exprimer en fonction des d_n les coefficients de Fourier $c_n(h)$ de la fonction h définie par $h(x) = f''(x) + (\alpha - 2\cos 2x)f(x)$.
Montrer que f est solution de $E_{\alpha,1}$ si et seulement si la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est élément de B_α.

c) En déduire que si $\alpha < -2$ alors $E_{\alpha,1}$ n'admet pas de solution non nulle π-périodique.

<u>Quatrième partie</u>

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que toute solution de $E_{\alpha,0}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Pour $\alpha > 0$, expliciter les coefficients g_n du développement $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n$ de l'élément g de $\mathcal{S}_{\alpha,0}$ vérifiant $g(0) = g'(0) = 1$.

2) On pose $c_n = \frac{(|\alpha| + n)^n}{n!}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$

3) Dans cette question on suppose l'existence d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence non nul R (R est éventuellement infini) et dont la somme f est solution sur $]-R,R[$ d'une équation $E_{\alpha,1}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer a_{n+2} en fonction de α et des a_{n-2k} avec $0 \leqslant k \leqslant E\left(\frac{n}{2}\right)$ où $E\left(\frac{n}{2}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

On pose $K = \text{Max}(|a_0|, |a_1|)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leqslant K c_n$ et en déduire une minoration de R.

4) Montrer que toute solution de $E_{\alpha,1}$ est développable en série entière sur un voisinage de 0.